MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII

Petre Năchilă

Cătălin Năchilă

Andreea Foransbergher

MATEMATICĂ

trunchi comun

pentru clasa a X-a

Editura Sigma

CUPRINS

Capitolul 4. Geometrie

Capitolul 5. Teste

BIBLIOGRAFIE

1. P. Năchilă, A. Foransbergher – *Manual pentru clasa a X-a*, Ed. Sigma, 2002, Bucureşti
2. P. Năchilă, N. Angelescu – *Algebră pentru clasa a X-a*, Ed. Paralela 45, 2000, Piteşti
3. P. Năchilă, M. Chirchiu – *Algebră pentru clasa a X-a*, Ed. Paralela 45, 2003, Piteşti
4. P. Năchilă – *Algebră vectorială și geometrie analitică*, Ed. Paralela 45, 2002, Bucureşti
5. P. Năchilă, M. Chirchiu – *Probleme de algebră și geometrie analitică*, Ed. Paralela 45, 2001, Piteşti
6. P. Năchilă – *Teme de algebră și analiză pentru bacalaureat*, Ed. Paralela 45, 2003, Piteşti

Capitolul 1
MULȚIMI DE NUMERE

1.1. Mulțimea numerelor raționale

Mulţimea numerelor naturale $\mathbb{N}=\{0, 1, 2, 3, ...\}$ este prima mulţime de numere pe care aţi studiat-o.

Pe mulţimea $\mathbb{N}$ sunt definite două operaţii, adunarea şi înmulţirea, având următoarele proprietăţi:

a) comutativitate: $x+y=y+x;\ xy=yx,\ \ \forall x,y\in\mathbb{N}$;

b) asociativitate: $(x+y)+z=x+(y+z);\ (xy)z=x(yz),\ \ \forall x,y,z\in\mathbb{N}$;

c) numărul 0 este element neutru pentru adunare, iar numărul 1 este element neutru pentru înmulţire:

$$x+0=0+x=x;\ \ x\cdot 1=1\cdot x=x,\ \ \forall x\in\mathbb{N}.$$

Rezolvarea unei ecuaţii de forma $a+x=b,\ a,b\in\mathbb{N},\ a>b$, a condus la extinderea mulţimii $\mathbb{N}$ la mulţimea numerelor întregi: $\mathbb{Z}=\{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$.

Operaţiile de adunare şi înmulţire se extind de la numerele naturale la numerele întregi (de la cuvântul latinesc „integrum" – întreg, complet). Extensia (în sensul de mai sus) a fost făcută de Nicolas Chuquet (1445–1500).

Apare o proprietate nouă: orice număr întreg are un „opus":

d) pentru orice $x\in\mathbb{Z}$, există numărul $-x\in\mathbb{Z}$ astfel încât: $x+(-x)=(-x)+x=0$.

Pe mulţimea numerelor naturale este definită relaţia de divizibilitate astfel:

Definiţie. Fiind date numerele naturale x, y spunem că *x divide y* (sau *x este un divizor al lui y*, sau *y este divizibil cu x*, sau *y este multiplu al lui x*) dacă există $z\in\mathbb{N}$ astfel încât $xz=y$. Notăm $x\mid y$ sau $y\ \vdots\ x$.

Relaţia de divizibilitate pe $\mathbb{N}$ are proprietăţile următoare:

1) $x\mid x,\ \ \forall x\in\mathbb{N}$;

2) $x\mid y$ şi $y\mid x\Rightarrow x=y$ (pentru $x,y\in\mathbb{N}$);

3) $x\mid y$ şi $y\mid z\Rightarrow x\mid z$ (pentru $x,y,z\in\mathbb{N}$);

4) $x\mid y$ şi $x\mid z\Rightarrow x\mid my+nz$ (pentru $x,y,z,m,n\in\mathbb{N}$).

Relaţia de divizibilitate se extinde şi la mulţimea $\mathbb{Z}$. Unele proprietăţi (1, 3, 4) rămân adevărate şi pe $\mathbb{Z}$. Proprietatea 2 este însă falsă: $x\mid y$ şi $y\mid x\Rightarrow |x|=|y|$.

Rezolvarea unor ecuaţii de forma $ax=b, a,b,x\in\mathbb{Z}$ şi a nu divide b, a condus la introducerea mulţimii numerelor raţionale $\mathbb{Q}=\left\{\frac{a}{b}\,\middle|\, a,b\in\mathbb{Z},\ b\neq 0\right\}$.

Definiție. Fracțiile $\frac{a}{b}$ și $\frac{c}{d}$, unde $a, c \in \mathbb{Z}$, $b, d \in \mathbb{Z}^*$, se numesc *echivalente* dacă $ad = bc$.
Notăm $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

Mulțimea tuturor fracțiilor echivalente cu o fracție dată este un *număr rațional.*

EXEMPLU

Fracțiile $\frac{4}{6}, \frac{6}{9}, \frac{8}{12}, \frac{10}{15}, \ldots$ sunt echivalente cu fracția $\frac{2}{3}$.

Mulțimea $\left\{\frac{2}{3}, \frac{4}{6}, \frac{6}{9}, \frac{8}{12}, \frac{10}{15}, \ldots\right\}$ reprezintă numărul rațional $\frac{2}{3}$.

Observații.

1. Orice fracție echivalentă cu fracția $\frac{a}{b}$, $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}^*$, reprezintă același număr rațional.

2. Pentru a simplifica exprimarea vom identifica un număr rațional cu oricare dintre fracțiile echivalente care îl reprezintă (de obicei se va lua fracția $\frac{m}{n}$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{Z}^*$, astfel încât $(m, n) = 1$). Deci vom considera că orice pereche $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ scrisă sub forma $\frac{a}{b}$ este un număr rațional.

3. Mulțimea numerelor raționale este $\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} \,\middle|\, a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}^*\right\}$.

4. Dacă $a \in \mathbb{Z}$, atunci $a = \frac{a}{1}$ și deci $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

5. Orice număr rațional poate fi reprezentat în două moduri: sub formă de fracție ordinară $\left(\frac{m}{n}, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}^*\right)$ sau sub formă de fracție zecimală.

Fracțiile zecimale pot fi *finite* (la dreapta virgulei apare un număr finit de zecimale) sau *infinite* (în care una sau mai multe zecimale se repetă de o infinitate de ori). Fracțiile zecimale infinite sunt la rândul lor periodice simple, periodice mixte sau neperiodice.

Fracțiile zecimale periodice simple sunt cele la care perioada începe imediat după virgulă, iar fracțiile zecimale periodice mixte sunt cele la care perioada nu începe imediat după virgulă.

Orice fracție zecimală finită sau infinită periodică (cu perioada diferită de 9) reprezintă un număr rațional din care provine prin algoritmul de împărțire.

Termenul de număr rațional (de la latinescul „ratio" – raport a fost propus de către Nicolaus Oresme (1323 – 1382).

Invers, aceste fracții se transformă în numere raționale conform următoarelor reguli:

a) $\overline{a_0,a_1a_2....a_n} = a_0\dfrac{\overline{a_1a_2....a_n}}{10^n}$, $a_0 \in \mathbb{N}$, a_i cifre, $i=\overline{1,n}$;

b) $\overline{a_0,(a_1a_2....a_n)} = a_0\dfrac{\overline{a_1a_2....a_n}}{\underbrace{99...9}_{\text{de } n \text{ ori}}}$, $a_0 \in \mathbb{N}$, a_i cifre, $i=\overline{1,n}$;

c) $\overline{a_0,a_1a_2....a_k(a_{k+1}a_{k+2}...a_{k+n})} = a_0\dfrac{\overline{a_1a_2...a_{k+n}} - \overline{a_1a_2....a_k}}{\underbrace{99...9}_{\text{de } n \text{ ori}}\underbrace{00...0}_{\text{de } k \text{ ori}}}$, $a_0 \in \mathbb{N}$, a_i cifre, $i=\overline{1,k+n}$, $n,k \in \mathbb{N}^*$.

Exemple. $\dfrac{2}{3} = 0{,}666... = 0{,}(6)$; $\quad \dfrac{23}{11} = 2{,}(09)$; $\quad \dfrac{231}{22} = 10{,}5(90)$.

• În urma aplicării algoritmului de împărțire nu se obțin fracții cu perioada (9). Dacă am considera acest fapt adevărat, atunci am avea rezultate aparent contradictorii.

Exemplu. $5{,}(9) = 5\dfrac{9}{9} = 5 + \dfrac{9}{9} = 6.$

Dacă am considera și perioada (0), atunci 6 = 6,(0).

Pentru a păstra unicitatea scrierii numerelor raționale ca fracții zecimale, acestea vor fi considerate fără perioada (9).

Teoremă. Orice număr rațional se poate reprezenta ca fracție zecimală finită sau ca fracție zecimală periodică cu perioada diferită de 9.

Observații. **1.** Orice fracție zecimală finită poate fi scrisă ca fracție zecimală cu perioada (9). De exemplu: 1,54 = 1,53(9); −7,68 = −7,67(9).

2. Putem considera și fracțiile zecimale finite ca fracții zecimale infinite cu perioada (0).

Considerăm numerele $\dfrac{4}{25}$; $\dfrac{13}{20}$; $-\dfrac{4}{15}$; $\dfrac{23}{11}$; $\dfrac{14}{33}$.

a) Care dintre aceste numere au reprezentări zecimale finite? Scrieți aceste reprezentări.

b) Care dintre aceste numere au reprezentări zecimale infinite? Scrieți aceste reprezentări.

O fracție zecimală este finită dacă și numai dacă se poate reprezenta sub forma unei fracții $\dfrac{a}{b}$, $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$, unde $b = 2^m \cdot 5^n$, $m, n \in \mathbb{N}$.

Definiție. O fracție zecimală infinită neperiodică se numește *număr irațional*.

Exemplu. Numerele 2,01011011101111....; 4,123456789101112131415.... sunt numere iraționale.

Pe mulțimea numerelor raționale au fost definite două operații, astfel:

adunarea: $\dfrac{a}{b}+\dfrac{c}{b}=\dfrac{a+c}{b}$, $a,c\in\mathbb{Z}$, $b\in\mathbb{Z}^*$;

înmulțirea: $\dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{c}{d}=\dfrac{ac}{bd}$, $a,c\in\mathbb{Z}$, $b,d\in\mathbb{Z}^*$.

Pentru a aduna două numere raționale care nu au același numitor, acestea sunt aduse mai înainte la același numitor.

Adunarea și înmulțirea numerelor raționale au următoarele proprietăți:

1) suma și produsul a două numere raționale sunt tot numere raționale:

$$\forall\, x,y\in\mathbb{Q}\Rightarrow x+y,\ x\cdot y\in\mathbb{Q}$$

2) adunarea și înmulțirea numerelor raționale sunt comutative:

$$x+y=y+x;\quad x\cdot y=y\cdot x,\quad \forall\, x,y\in\mathbb{Q}$$

3) adunarea și înmulțirea numerelor raționale sunt asociative:

$$(x+y)+z=x+(y+z);\quad (xy)z=x(yz),\quad \forall\, x,y,z\in\mathbb{Q}$$

4) numărul 0 este element neutru în raport cu adunarea, iar numărul 1 este element neutru în raport cu înmulțirea:

$$x+0=0+x=x,\quad 1\cdot x=x\cdot 1=x,\quad \forall\, x\in\mathbb{Q}$$

5) Orice număr rațional x are un „ opus " în raport cu adunarea:

$$x+(-x)=(-x)+x=0,\quad \forall\, x\in\mathbb{Q}$$

Orice număr rațional nenul x are un „invers", notat x^{-1} $\left(\text{sau } \dfrac{1}{x}\right)$, în raport cu înmulțirea: $x\cdot\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{x}\cdot x=1$.

6) Înmulțirea este distributivă în raport cu adunarea:

$$x(y+z)=xy+xz;\quad (y+z)x=yx+zx,\quad \forall\, x,y,z\in\mathbb{Q}.$$

Pe mulțimea numerelor raționale se mai pot defini și alte operații:

– scăderea: $x-y=x+(-y)$, $\forall\, x,y\in\mathbb{Q}$;

– împărțirea: $x:y=x\cdot\dfrac{1}{y}$, $\forall\, x\in\mathbb{Q}$, $\forall\, y\in\mathbb{Q}^*$;

– ridicarea la putere: $x^n=\underbrace{x\cdot x\cdot\ldots\cdot x}_{n\text{ factori}}$, $\forall\, x\in\mathbb{Q}$, $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$;

$$x^m=\frac{1}{x^{-m}},\quad \forall\, x\in\mathbb{Q}^*,\ m\in\mathbb{Z}\setminus\mathbb{N};$$

Se admite că : $0^m=0$, $\forall\, m\in\mathbb{Z}^*$, 0^0 – operație fără sens.

Exerciţii rezolvate.

1. Să se determine mulţimile: $A=\left\{n\in\mathbb{N}\,\middle|\,\frac{2n}{n-1}\in\mathbb{N}\right\}$; $B=\left\{n\in\mathbb{Z}\,\middle|\,\frac{2n}{n-1}\in\mathbb{Z}\right\}$;

$C=\left\{n\in\mathbb{N}\,\middle|\,\frac{2n}{n-1}\in\mathbb{Z}\right\}$; $D=\left\{n\in\mathbb{Z}\,\middle|\,\frac{2n}{n-1}\in\mathbb{N}\right\}$.

Soluţie. În toate cazurile avem $n\neq 1$. Putem scrie $x=\frac{2n}{n-1}=\frac{2(n-1)+2}{n-1}=2+\frac{2}{n-1}$.

Pentru ca $x\in\mathbb{Z}$ este necesar şi suficient ca $n-1\mid 2$, adică $n-1\in\{-2,-1,1,2\}$. Rezultă că $n\in\{-1,0,2,3\}$. Avem $B=\{-1,0,2,3\}$. Se deduce imediat că $A=\{0,2,3\}$, $C=\{0,2,3\}$, $D=\{-1,0,2,3\}$.

Observaţie. Daţi alte exemple şi comparaţi mulţimile A, B, C, D.

2. Daţi exemple de fracţii echivalente $\frac{a}{b}$ şi $\frac{c}{d}$ pentru care:

a) b şi d sunt numere consecutive; **b)** b şi d sunt numere prime între ele.

Soluţie. **a)** $\frac{6}{2}$ şi $\frac{9}{3}$; $\frac{-10}{5}$ şi $\frac{-12}{6}$; $\frac{-72}{-9}$ şi $\frac{-80}{-10}$;

b) $\frac{20}{4}$ şi $\frac{25}{5}$; $\frac{-24}{6}$ şi $\frac{-44}{11}$; $\frac{32}{-8}$ şi $\frac{60}{-15}$.

3. Determinaţi numărul de triplete (a, b, c) formate din cifre nenule diferite pentru care $a,(b)+b,(c)+c,(a)=8,(8)$.

Soluţie. Avem $a,(b)+b,(c)+c,(a)=8,(8)\Leftrightarrow a+b+c+\frac{a+b+c}{9}=8\frac{8}{9}\Leftrightarrow a+b+c=8$.

Presupunând $1\leqslant a<b<c\leqslant 9$ avem soluţiile $(1, 2, 5)$, $(1, 3, 4)$. Permutând a, b, c obţinem $6 + 6 = 12$ soluţii.

4. Fie $a, b, c\in\mathbb{Q}$ astfel încât $abc = 1$, $ab + a + 1 \neq 0$, $bc + b + 1 \neq 0$, $ca + c + 1 \neq 0$.

Să se determine numărul $s=\frac{a}{ab+a+1}+\frac{b}{bc+b+1}+\frac{c}{ca+c+1}$.

Soluţie. Deoarece $abc = 1$ avem $\frac{b}{bc+b+1}=\frac{ab}{abc+ab+a}=\frac{ab}{ab+a+1}$, $\frac{c}{ca+c+1}=$

$=\frac{abc}{abca+abc+ab}=\frac{1}{ab+a+1}$. Rezultă că $s=\frac{a+ab+a}{ab+a+1}=1$.

PROBLEME PROPUSE

• 1. Să se scrie sub formă de fracții zecimale infinite fracțiile:

$\frac{25}{4}$; $-\frac{4}{125}$; $\frac{25}{6}$; $-\frac{13}{9}$; $-\frac{5}{12}$; $-\frac{8}{27}$.

• 2. Să se scrie sub formă de fracție ordinară următoarele fracții zecimale:

a) 0,(24); **b)** – 3,(26); **c)** – 2,2(32); **d)** – 4,25(12).

• 3. Să se precizeze dacă următoarele numere sunt raționale:

a) 0,12121212...; **b)** 0,01001000100001...; **c)** 1241212; **d)** 456,456456456... .

• 4. Să se demonstreze că următoarele numere sunt raționale:

a) $\frac{\overline{aa}}{22}$; **b)** $\frac{\overline{aaa}}{12}$; **c)** $\frac{2^n \cdot 5^{n+1} + 2^{n+1} \cdot 5^n}{140}$, $n \in \mathbb{N}$.

• 5. Dați exemple de perechi de numere x, y având proprietățile (separate):

a) $x, y \in \mathbb{Z} - \mathbb{N}$, $xy \in \mathbb{N}$; **b)** $x, y \in \mathbb{Z}$, $\frac{x}{y} \in \mathbb{N}$;

c) $x, y \in \mathbb{Q} - \mathbb{Z}$, $x + y \in \mathbb{Z}$; **d)** $x, y \in \mathbb{Q} - \mathbb{Z}$, $xy \in \mathbb{Z}$.

•• 6. Să se efectueze:

a) 0,23(4) + 0,2(34) + 0,(234) + 0,43(2) + 0,4(32) + 0,(432);

b) $\dfrac{\frac{1}{0,(21)} + \frac{1}{0,(42)} + \frac{1}{0,(84)}}{\frac{1}{0,2(1)} + \frac{1}{0,4(2)} + \frac{1}{0,8(4)}}$; **c)** $\left[0,2 + \frac{18}{31} \cdot \left(\frac{1}{45} + \frac{7}{30} - \frac{1}{12}\right)\right] : (0,1)^2$;

d) [1,2(3) – 2,5 – 0,(17)] – [0,5 + 0,(82) – 2,7(6)].

•• 7. Să se determine a 2000 - a zecimală a numerelor:

a) 2,2(31); **b)** $\frac{4}{9}$; **c)** $\frac{3}{25}$; **d)** $-\frac{17}{30}$.

•• 8. Să se demonstreze că: $\overline{0,(xyz)} + \overline{0,(yzx)} + \overline{0,(zxy)} = \overline{0,x(yz)} + \overline{0,y(zx)} + \overline{0,z(xy)}$.

••• 9. Să se demonstreze că nu există numere raționale $\frac{m}{n}$ astfel încât:

a) $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 3$; **b)** $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = p$, p număr prim; **c)** $\left(\frac{m}{n}\right)^3 = 5$.

••• 10. Să se demonstreze că: **a)** $\frac{1}{n^2-1} - \frac{1}{n} \in \mathbb{Q}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$;

b) $\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} \notin \mathbb{N}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

••• 11. Să se determine $A = \{n \in \mathbb{N} \mid \sqrt{n! + 2} \in \mathbb{Q}\}$, unde $n! = 1 \cdot 2 \cdot ... \cdot n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$; $0! = 1$.

1.2. Mulțimea numerelor reale

Vom considera numărul $a = 0{,}21211211121111...$ (după prima cifră 2 urmează o cifră 1, după a doua cifră 2 urmează două cifre 1, etc.). Fracția zecimală a nu este periodică. Într-adevăr, dacă această fracție ar fi periodică, vom nota cu n numărul de zecimale ale perioadei. Cum numărul de cifre 2 este infinit, perioada va conține cel puțin o cifră 2 și cel mult $n-1$ cifre 1. Atunci între orice două cifre 2 consecutive pot să apară cel mult $n-1$ cifre 1 consecutive (contradicție cu definirea lui a).

Vom demonstra faptul că numărul $\sqrt{3}$ nu este rațional. Presupunem, prin reducere la absurd, că există $a, b \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $\frac{a}{b} = \sqrt{3}$, $(a, b) = 1$. Rezultă că $a^2 = 3b^2$. Deoarece a, b sunt prime între ele rezultă că $3 \mid a^2$ și deci $3 \mid a$. Fie $c \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $a = 3c$. Din $a^2 = 3b^2$ și $a = 3c$ rezultă că $b^2 = 3c^2$. Deoarece $(a, b) = 1$ și $c \mid a$ rezultă că $(b, c) = 1$ și deci $3 \mid b^2$, de unde $3 \mid b$. Obținem că 3 este divizor comun pentru a și b (contradicție).

Definiție. O fracție zecimală infinită și neperiodică se numește *număr irațional.*

Alte exemple de numere iraționale sunt: π = raportul dintre lungimea oricărui cerc și diametrul acestuia; numărul de aur $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

Denumirea de „irațional" vine din limba latină („i" – fără, „ratio" – raport).

Dacă notăm cu I mulțimea numerelor iraționale, atunci avem $\mathbb{Q} \cap I = \emptyset$. Mulțimea $\mathbb{Q} \cup I$ notată cu $\mathbb{R}$ se numește *mulțimea numerelor reale.*

În concluzie, prin număr real înțelegem orice fracție zecimală infinită, periodică sau neperiodică.

Numerele raționale sunt atunci identificate cu fracțiile zecimale periodice, cu perioada diferită de 9, sau neperiodice.

În clasele precedente s-a indicat un algoritm de construcție a fracției zecimale pentru numărul $\sqrt{2}$ (număr irațional). Se poate arăta că $\sqrt{2} = 1{,}41421356...$.

Vom identifica fiecare număr real cu fracția zecimală prin care se reprezintă, adică $a = a_0{,}a_1a_2a_3...$.

Definiție. Fie numerele reale pozitive $a = a_0{,}a_1a_2a_3...$ și $b = b_0{,}b_1b_2b_3...$. Spunem că $a < b$ dacă există $k \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $a_k < b_k$ și $a_i = b_i$, $i = \overline{0, k-1}$.

Exemplu. Avem $0{,}(6) > 0{,}6(2)$, deoarece $\frac{6}{9} > \frac{56}{90}$ (sau $0{,}666... > 0{,}6262...$)

Definiție. Pentru numărul real pozitiv $a = a_0{,}a_1a_2a_3...$ aproximările zecimale cu o eroare mai mică decât 10^{-n}, $n \in \mathbb{N}$, sunt:
a) prin lipsă: $a_n' = a_0{,}a_1a_2a_3...a_n$;
b) prin adaos: $a_n'' = a_0{,}a_1a_2a_3...a_n + 10^{-n}$.

Observații. 1. Pentru orice $n \in \mathbb{N}$ avem $a_n', a_n'' \in \mathbb{Q}$.
2. Pentru orice $n \in \mathbb{N}$ avem $a_n' \leq a < a_n''$.

EXEMPLU

Fie numerele reale $a=\sqrt{2},\ b=\sqrt{5},\ c=\sqrt{2}+\sqrt{5}$. Deoarece $\sqrt{2}=1{,}41421...$, $b=2{,}23606...$, atunci avem următoarele aproximări pentru a, b, c:

Eroarea	Prin lipsă			Prin adaos		
	a	b	c	a	b	c
$10^0=1$	1	2	3	2	3	4
$10^{-1}=\dfrac{1}{10}$	1,4	2,2	3,6	1,5	2,3	3,7
$10^{-2}=\dfrac{1}{100}$	1,41	2,23	3,64	1,42	2,24	3,65
$10^{-3}=\dfrac{1}{1000}$	1,414	2,236	3,650	1,415	2,237	3,652
$10^{-4}=\dfrac{1}{1000}$	1,4142	2,2360	3,6502	1,4143	2,2361	3,6504

Observații. 1. Aproximarea zecimală de ordin n pentru $a+b$ nu este egală cu suma aproximărilor de ordin n ale lui a și b, deoarece mai întâi se calculează suma și apoi aceasta se aproximează.

2. Pentru numerele reale $a=a_0{,}a_1a_2a_3...$, $b=b_0{,}b_1b_2b_3...$ vom defini suma $s=a+b$ ca fiind numărul real $s=s_0{,}s_1s_2s_3...$ cu proprietatea: $a_n'+b_n'\leqslant s< a_n''+b_n''$, $\forall\, n\in\mathbb{N}$.

Dacă $a, b>0$, definim produsul $p=ab$ ca fiind numărul $p=p_0{,}p_1p_2p_3...$ cu proprietatea: $a_n'b_n'\leqslant p< a_n''b_n''$, $\forall\, n\in\mathbb{N}$.

Demonstrația privind existența și unicitatea numerelor s și p depășește cadrul manualului.

EXEMPLU

Să se determine primele trei zecimale ale produsului $p=\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}$.

Folosind datele din tabelul precedent avem:

$2\leqslant p<4$

$3{,}1\leqslant p<3{,}2$

$3{,}16\leqslant p<3{,}17$

$3{,}161\leqslant p<3{,}163$

$3{,}1621\leqslant p<3{,}1623$

Am obținut, deci $p=3{,}162...$.

Observație. Proprietățile referitoare la operațiile de adunare și înmulțire definite pe $\mathbb{Q}$ rămân adevărate și pe mulțimea $\mathbb{R}$. Între mulțimile de numere studiate are loc relația $\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}$.

Exerciții rezolvate. 1. Să se construiască cu rigla și compasul imaginile geometrice ale numerelor $\sqrt{2},\ \sqrt{3},\ \sqrt{5}$.

Soluție. Considerăm reperul cartezian xOy și considerăm pătratul de latură 1 având diagonala OA (vezi fig. 1). Avem $OA=\sqrt{2}$. Trasăm un semicerc de rază $\sqrt{2}$. Considerăm apoi dreptunghiul de laturi 1 și $\sqrt{2}$. Diagonala sa este $OB=\sqrt{3}$. Procedeul continuă.

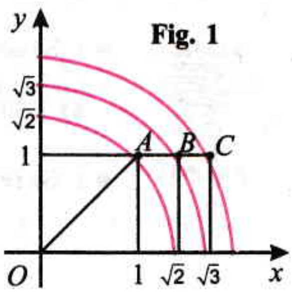

Fig. 1